ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DE

QUELQUES COURBES.

Hoster N. Bunnan,
1874.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DE

QUELQUES COURBES

PAR

ED. PELLIS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE SPÉCIALE DE LAUSANNE

BORDEAUX
IMPRIMERIE G. GOUNOUILHOU,
place Puy-Paulin, 1.

1859

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE

DE

QUELQUES COURBES.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

Lorsque l'énoncé d'un problème ne donne qu'une seule équation entre deux inconnues, le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'une infinité de solutions satisfont l'énoncé. En effet, l'équation, résolue par rapport à l'une des inconnues, sera de la forme $y = f(x)$, dans laquelle, en donnant à x toutes les valeurs imaginables, on obtiendra pour y une infinité de valeurs. Il faut observer cependant que, dans certains cas, ces valeurs pourront être imaginaires.

On sait, d'autre part, qu'un point est déterminé sur un plan par sa distance à deux droites fixes, ou à deux points fixes, ou en général par deux conditions suffisantes. Or, si dans la relation $y = f(x)$ nous supposons que les valeurs de x soient prises pour l'une de ces conditions, et les valeurs correspondantes de y pour l'autre, les valeurs simultanées de x et y détermineront un point sur le plan. On voit aisément :

1° Que si x varie d'une manière continue, y variera en général d'une manière continue, et que par conséquent la suite des points obtenus sera continue.

2° Que pour chaque valeur de x on obtiendra en général un nombre fini de valeurs de y, égal au nombre des racines réelles de l'équation. A l'une des conditions qui déterminent le point ne correspondra donc qu'un nombre fini de points. On en conclut que la suite des points obtenus ne sera pas une surface, mais une ou plusieurs lignes.

3° Que si l'on construit géométriquement quelques points de cette ligne, on pourra, en les unissant par un trait continu, embrasser d'un coup d'œil toutes les solutions, et faire ainsi une étude facile et complète de la relation $y = f(x)$.

4° Que si réciproquement on demande l'étude d'une ligne définie par ses propriétés géométriques, la recherche de son équation sera indispensable pour la solution des questions dont le calcul infinitésimal peut seul donner la clef.

Il est évident que l'équation d'une courbe ne sera pas la même dans les divers systèmes de coordonnées que l'on peut imaginer. Chacun d'eux exprimera, avec une simplicité remarquable, certaines classes de courbes qui, dans d'autres systèmes, deviennent d'une complication embarrassante. Il est donc utile de rechercher dans chaque système les courbes appartenant aux équations les plus simples, et de choisir, pour l'étude d'une courbe donnée, un système qui lui soit favorable.

Nous étudierons ici les courbes les plus élémentaires d'un système très-usité, le système *unipolaire*.

Le *pôle* est un point fixe sur le plan.

L'*axe* est une droite fixe qui passe par le pôle.

Un point quelconque du plan est déterminé lorsqu'on connaît :

1° La longueur ρ de la droite qui va du pôle au point ; cette ligne se nomme le *rayon vecteur* du point.

2° L'angle ω du rayon vecteur avec l'axe polaire.

La relation est donc de la forme $\rho = f(\omega)$.

On sait qu'une ligne ρ ne peut être comparée à un angle ω, et que par conséquent ω devra être exprimé en fonction de ses lignes trigonométriques, ou de la longueur de son arc.

Les valeurs négatives de ρ se portent sur son prolongement à partir du pôle.

L'angle ω doit toujours être pris dans le même sens et à partir de la même origine.

Dans une équation polaire, on ne peut remplacer les lignes trigonométriques par des fonctions d'autres lignes que lorsque ces fonctions sont du même degré que la ligne proposée. Ainsi, $\sin\omega$ ne pourra pas se remplacer par $\sqrt{1 - \cos^2\omega}$, puisque cette dernière expression a deux valeurs de signes contraires.

Recherche des formules générales

qui déterminent la tangente, la sous-tangente, la sous-normale, la normale, la rectification et la quadrature.

TANGENTE.

La direction de la tangente à une courbe est déterminée lorsqu'on connaît l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur du point de tangence.

Menons une sécante MM′ (planche I, fig. I), et prenons PF égal à PM; on a dans le triangle MM′F

$$\frac{\sin M'}{\sin M} = \frac{FM}{FM'}$$

Supposons que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, à la limite la sécante deviendra tangente; mais alors l'angle F sera droit, donc sin M sera égal à cos M′. De plus, FM sera devenu égal à l'arc qu'il sous-tend et aura pour mesure $\rho\, d\omega$; FM′ sera égal à $d\rho$, et on aura

$$\frac{\sin M'}{\cos M'} = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

L'angle M′ sera devenu l'angle cherché μ que la tangente fait avec le rayon vecteur; on aura donc

$$\operatorname{tang} \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

SOUS-TANGENTE.

La sous-tangente est la droite, perpendiculaire au rayon vecteur, qui passe par le pôle; elle est limitée par sa rencontre avec la tangente et par le pôle.

On a donc pour la longueur ST de la sous-tangente :

$$\mathrm{ST} = \rho \operatorname{tang} \mu = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$$

SOUS-NORMALE.

La sous-normale est la droite, perpendiculaire au rayon vecteur, qui passe par le pôle; elle est limitée par sa rencontre avec la normale et par le pôle.

On a donc, pour la longueur S_N de la sous-normale :

$$S_N = \frac{\rho}{\tan \mu} = \frac{d\rho}{d\omega}$$

On reconnaît ici ce fait remarquable, que la longueur de la sous-normale a pour mesure la valeur de la dérivée du rayon vecteur.

NORMALE.

La normale est la droite, perpendiculaire à la tangente, qui passe par le point considéré. Elle est limitée par ce point et par sa rencontre avec la perpendiculaire au rayon vecteur, qui passe par le pôle.

On a donc pour la longueur N de la normale :

$$N = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

RECTIFICATION.

La longueur d'un arc de courbe s'obtient comme suit :

On a dans le triangle MM′F, à la limite, et en nommant *ds* l'élément de courbe (planche I, fig. I),

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\omega)^2}$$

d'où

$$s = \int \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 (d\omega)^2}$$

ou

$$s = \int d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

QUADRATURE.

La surface *dq* du segment élémentaire PM′M, considéré comme un secteur, est, à la limite (planche I, fig. I) :

$$dq = \frac{1}{2} \frac{\text{PM} + \text{PM}'}{2} \text{arc MM}'$$

ou

$$dq = \frac{1}{2} \rho^2 \, d\omega$$

Donc

$$q = \frac{1}{2} \int \rho^2 \, d\omega$$

Étude élémentaire de quelques courbes.

Nous discuterons les courbes suivantes :

I. $\rho = a \cos (n\omega) + b$
II. $\rho = a \sin (n\omega) + b$
III. $\rho = a \operatorname{tang} (n\omega) + b$

IV. $\rho = a$ cotang $(n\omega) + b$
V. $\rho = a$ séc $(n\omega) + b$
VI. $\rho = a$ cosèc $(n\omega) + b$
VII. Spirales.

Les lettres a, b et n représentent des constantes quelconques.

I.

Étude de la courbe $\rho = a \cos(n\omega) + b$.

(Cosinusoïdes polaires du premier degré.)

La courbe $\rho = a \cos(n\omega) + b$ s'obtient en ajoutant la quantité constante, positive ou négative, b, à tous les rayons vecteurs de la courbe $\rho = a \cos(n\omega)$. C'est donc cette dernière courbe que nous discuterons.

Les cosinusoïdes se divisent en deux classes :

1° Les *cosinusoïdes entières,* dans l'équation desquelles n représente un nombre entier.

2° Les *cosinusoïdes fractionnaires,* dans l'équation desquelles n est fractionnaire.

COSINUSOÏDES ENTIÈRES.

On voit aisément que, dans l'équation $\rho = a \cos(n\omega)$,

1° On a un maximum positif de ρ lorsque l'angle $n\omega$ atteint les valeurs 0°, 360°, 720°..., et un maximum négatif ou minimum, lorsque $n\omega$ atteint 180°, 540°, 900°.... Entre chacune de ces valeurs, la quantité $\cos(n\omega)$ deviendra nulle, et par conséquent la courbe viendra passer par le pôle.

2° On obtient ainsi des branches (1) de courbes symétriques par rapport à leur axe, qui est la valeur maximum de ρ. Elles auront une distance angulaire d'axe en axe, constante, contenue un nombre exact de fois dans 180°, et égale à $\frac{180}{n}$.

3° Les branches de rang impair seront positives, et celles de rang pair négatives.

4° Le nombre des branches positives sera égal à n; le nombre des branches négatives sera de même égal à n; le nombre total des branches sera $2n$. Il faut observer toutefois que lorsque n est un nombre impair, la $n+1^{\text{ème}}$ branche, qui correspond évidemment à 180°, sera paire et par conséquent négative; elle reviendra alors tomber sur l'origine, et on retrouve les branches déjà construites, seulement avec un signe différent. Il n'y aura par conséquent dans ce cas que n branches.

5° Les prolongements des axes des branches, lorsque n est impair, formeront des branches imaginaires, et les branches réelles jouiront des deux signes.

6° Il est impossible, d'après ce qui précède, d'obtenir une cosinusoïde entière ayant c branches, lorsque c est pair et $\frac{c}{2}$ impair, c'est-à-dire lorsque c appartient à la progression arithmétique qui a pour premier terme 2 et pour raison 4.

(1) Nous donnons ici au mot *branche* une acception un peu plus générale qu'on ne le fait ordinairement.

7° Lorsque n est égal à l'unité, l'équation devient $\rho = a \cos \omega$ (planche I, fig. II). On voit aisément que, par le fait même qu'exprime cette relation, les angles tels que PAB sont toujours droits. Cette courbe est donc un cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

COSINUSOÏDES FRACTIONNAIRES.

Lorsque n est une fraction que nous représenterons par $\frac{p}{q}$, en posant $\frac{p}{q}\omega' = 180°$, on obtient pour la distance ω' des branches $\omega' = \frac{180\,q}{p}$. Si cet angle entre un nombre exact de fois dans 360° ou dans un nombre exact de fois 360°, la courbe aura un nombre fini de branches, sinon elle est infinie tout en ne pouvant sortir du cercle qui a pour rayon a.

Les différentes branches des cosinusoïdes fractionnaires empiètent en général les unes sur les autres, ce qui n'a pas lieu dans les cosinusoïdes entières.

Construction par points de la courbe $\rho = a \cos 4\,\omega$.

(Planche VI, fig. I.)

(L'angle droit est supposé divisé en 100 degrés.)

Pour $\omega =$	0	on a	$\rho = a \cos$	0 =	a
» $\omega =$	25	»	$\rho = a \cos$	100 =	o
» $\omega =$	50	»	$\rho = a \cos$	200 =	$-a$

Pour	$\omega = 75$	on a	$\rho = a \cos 300 =$	o
»	$\omega = 100$	»	$\rho = a \cos 400 =$	a
»	$\omega = 125$	»	$\rho = a \cos 500 =$	o
»	$\omega = 150$	»	$\rho = a \cos 600 =$	$-a$
»	$\omega = 175$	»	$\rho = a \cos 700 =$	o
»	$\omega = 200$	»	$\rho = a \cos 800 =$	a
»	$\omega = 225$	»	$\rho = a \cos 900 =$	o
»	$\omega = 250$	»	$\rho = a \cos 1000 =$	$-a$
»	$\omega = 275$	»	$\rho = a \cos 1100 =$	o
»	$\omega = 300$	»	$\rho = a \cos 1200 =$	a
»	$\omega = 325$	»	$\rho = a \cos 1300 =$	o
»	$\omega = 350$	»	$\rho = a \cos 1400 =$	$-a$
»	$\omega = 375$	»	$\rho = a \cos 1500 =$	o
»	$\omega = 400$	»	$\rho = a \cos 1600 =$	a

Appliquons aux conchoïdes à base cosinusoïde $\rho = a \cos (n\omega) + b$ les formules générales que nous avons obtenues.

TANGENTE.

La formule générale

$$\text{tang}\ \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

devient

$$\text{tang}\ \mu = -\frac{a \cos (n\omega) + b}{an \sin (n\omega)}$$

SOUS-TANGENTE.

La formule générale

$$\text{St} = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$$

devient

$$\mathrm{S_T} = -\frac{a^2\cos^2(n\omega) + b^2 + 2\,ab\cos(n\omega)}{an\sin(n\omega)}$$

SOUS-NORMALE.

La formule générale

$$\mathrm{S_N} = \frac{d\rho}{d\omega}$$

devient

$$\mathrm{S_N} = -\,an\sin(n\omega)$$

NORMALE.

La formule générale

$$\mathrm{N} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

devient

$$\mathrm{N} = \sqrt{a^2\cos^2(n\omega) + b^2 + 2\,ab\cos(n\omega) + a^2n^2\sin^2(n\omega)}$$

RECTIFICATION.

La formule générale

$$s = \int d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

devient

$$s = \int d\omega\,\sqrt{a^2\cos^2(n\omega) + b^2 + 2\,ab\cos(n\omega) + a^2n^2\sin^2(n\omega)}$$

QUADRATURE.

La formule générale

$$q = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$$

devient

$$q = \frac{1}{2}\int \left\{ a^2 \cos^2 (n\omega)\, d\omega + b^2\, d\omega + 2\, ab \cos (n\omega)\, d\omega \right\}$$

Remarques sur la conchoïde $\rho = a \cos \omega + b$.

(Planches II et III.)

Lorsqu'on a $b > a$, la courbe prend le nom de *cardioïde.*

Lorsque $a = b$, la courbe est une *épicycloïde équilatère;* elle prend aussi le nom de *cardioïde.*

Lorsqu'on a $b < a$, la courbe prend le nom de *limaçon de Pascal.* Dans le cas particulier où $a = 2b$, le limaçon prend le nom de *trisectrice.*

La courbe $\rho = a \cos \omega + a$ présente plusieurs propriétés remarquables. On sait que a représente le diamètre du cercle qui sert de base à la courbe. Prenons une direction quelconque PA du rayon vecteur (planche II); le point B de la courbe est obtenu par l'addition de $AB = a$ à la ligne PA. Menons OO′ parallèle à PA et égal à a, et traçons le cercle de rayon O′R. Puisque AB et OO′ sont égaux et parallèles, la figure

OABO' est un parallélogramme, et B se trouve sur la circonférence O'R. Les angles PAO, AOR sont égaux comme alternes-internes, et sont égaux aux angles APO et ROM, comme il est facile de le voir. Les angles POR, BO'R sont donc égaux, ainsi que leurs arcs. On peut, en conséquence, considérer la courbe comme engendrée par le point B lorsque la circonférence O' roule à partir de P, sans glissement sur la circonférence O. C'est à cause de cette propriété que la courbe prend le nom d'*épicycloïde équilatère*.

L'épicycloïde équilatère est susceptible d'un troisième mode de génération. Par le point M, menons un rayon MT, et traçons la tangente TK au cercle de diamètre PN. Abaissons PK perpendiculaire à TK, puis à partir de K prenons KF = MT. La figure KFMT est un rectangle; le point F est donc sur la circonférence de diamètre PM; et comme MT est égal à a, on a KF = a. Le point K est donc sur l'épicycloïde équilatère; celle-ci est par conséquent le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'une circonférence à toutes les tangentes de cette circonférence. Il est facile de voir que, lorsque le point est hors de la circonférence, le lieu est un limaçon, et que lorsqu'il est intérieur, le lieu est une cardioïde.

Les courbes de la forme $\rho = a \cos \omega + b$ peuvent encore être considérées comme le lieu des points obtenus, en décrivant, du pôle comme centre, un cercle de rayon b, et en ajoutant aux rayons la valeur du cosinus de leur angle, a étant pris pour unité.

II.

Étude de la courbe $\rho = a \sin(n\omega) + b$.

(Sinusoïdes polaires du premier degré.)

On sait que les valeurs de $\sin \alpha$ sont les mêmes que celles de $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. Si donc l'axe polaire des courbes de la forme $\rho = a \cos(n\omega) + b$ prenait une position inclinée de $\frac{90}{n}$ sur la première, on obtiendrait les courbes de la forme $\rho = a \sin(n\omega) + b$.

L'étude des sinusoïdes est ainsi ramenée à celle des cosinusoïdes. Les formules de la tangente, la sous-tangente, la sous-normale, la normale, la rectification et la quadrature, ne présentent pas de difficulté.

La courbe $\rho = a \sin 2\omega$ offre la particularité suivante. Soit PL′ (planche III, fig. II) l'axe polaire. Menons par un point quelconque M de la courbe une perpendiculaire AB au rayon vecteur, et menons PB perpendiculaire à PL′, on a évidemment :

$$PM = AP \cos \omega$$

mais

$$AP = AB \sin PBA$$

et comme l'angle PBA est égal à ω, on a :

$$AP = AB \sin \omega$$

donc

$$PM = AB \sin \omega \cos \omega$$

mais $PM = \rho$, de plus $\frac{1}{2} \sin 2\omega = \sin \omega \cos \omega$

donc

$$\rho = \frac{AB}{2} \sin 2\omega$$

or, l'équation de la courbe est

$$\rho = a \sin 2\omega$$

par conséquent

$$a = \frac{AB}{2}$$

Donc la droite AB , perpendiculaire au rayon vecteur, a une longueur constante et égale à $2a$, ou à l'axe CD. La courbe est donc le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées, du pôle, sur la droite AB dont les extrémités se meuvent sur les côtés d'un angle droit, le sommet étant au pôle.

L'équation de cette courbe rapportée à des coordonnées rectilignes est du sixième degré; on la nomme *scarabée équilatère*.

III.

Étude de la courbe $\rho = a \text{ tang } (n\omega) + b$.

(Tangentoïdes polaires du premier degré.)

L'étude de la courbe $\rho = a \text{ tang } (n\omega) + b$ se ramène à celle de la courbe $\rho = a \text{ tang } (n\omega)$. Les tangentoïdes se divisent en deux classes :

1° Les *tangentoïdes entières,* dans l'équation desquelles n représente un nombre entier.

2° Les *tangentoïdes fractionnaires,* dans l'équation desquelles n est fractionnaire.

TANGENTOÏDES ENTIÈRES.

1° Lorsque dans l'équation $\rho = a \operatorname{tang}(n\omega)$, l'angle $n\omega$ atteint les valeurs 0°, 180°, 360°, 540°..., le rayon vecteur est nul, et par conséquent la courbe passe par le pôle. Entre chacune de ces valeurs se trouvent deux valeurs infinies de ρ, l'une positive et l'autre négative. Ces deux valeurs sont simultanées.

2° On obtient ainsi des branches de courbes infinies, qui passent toutes par le pôle. Elles ont une distance angulaire constante, contenue un nombre exact de fois dans 90° et égale à $\frac{90}{n}$.

3° Les branches de rang impair seront positives, et celles de rang pair négatives.

4° Le nombre total des branches sera $4n$, que n soit pair ou impair, puisque la $2n^{\text{ème}}$ branche étant toujours de rang pair, la $2n + 1^{\text{ème}}$ sera impaire et par conséquent positive; elle ne pourra donc jamais venir se confondre avec la première branche, comme cela a lieu pour la courbe $\rho = a \cos(n\omega)$.

5° On voit aisément par ce qui précède qu'il est impossible d'obtenir une tangentoïde entière ayant c branches, si c n'est pas exactement divisible par 4.

TANGENTOÏDES FRACTIONNAIRES.

Lorsque n est une fraction que nous représenterons

par $\frac{p}{q}$, en posant $\frac{p}{q}\,\omega' = 90$, on obtient pour la distance ω' des branches, $\omega' = \frac{90\,q}{p}$. Si cet angle entre un nombre exact de fois dans 360° ou dans un multiple exact de 360°, la courbe aura un nombre fini de branches, sinon le nombre de branches infinies sera infini.

IV.

Étude de la courbe $\rho = a \operatorname{cotang}(n\omega) + b$.

(Cotangentoïdes polaires du premier degré.)

On trouvera aisément le moyen de ramener l'étude des cotangentoïdes à celle des tangentoïdes, par un simple changement angulaire dans la position de l'axe.

V.

Étude de la courbe $\rho = a \operatorname{séc}(n\omega) + b$.

(Sécantoïdes polaires du premier degré.)

Les sécantoïdes se divisent en deux classes :

1° Les *sécantoïdes entières,* dans l'équation desquelles n est un nombre entier.

2° Les *sécantoïdes fractionnaires,* dans l'équation desquelles n est un nombre fractionnaire.

On voit que, dans l'équation $\rho = a$ séc $(n\omega)$:

1° La sécante n'étant jamais plus petite que le rayon, ρ ne sera jamais nul ; la courbe ne passera donc pas par le pôle. Lorsque l'angle $n\omega$ atteint 0, 180°, 360°, 540°..., le rayon vecteur devient égal à a ; entre chacune de ces valeurs se trouvent deux valeurs infinies de ρ, l'une positive, l'autre négative. Ces deux valeurs sont simultanées.

2° On obtient ainsi des branches de courbes infinies, dont le point le plus rapproché du pôle en est à une distance a. Elles ont une distance angulaire constante, contenue un nombre exact de fois dans 90°, et égale à $\frac{90}{n}$.

3° La 1re branche sera positive, la 2e et la 3e négatives, la 4e et la 5e positives, et ainsi de suite.

4° Le nombre total des branches sera $4n$; avec cette réserve que si $2n$ appartient à la série des nombres 2, 6, 10, 14..., la $2n + 1^{\text{ème}}$ branche appartiendra à la série 3, 7, 11, 15..., et sera par conséquent négative ; elle viendra donc retomber sur la première, et l'on n'aura que $2n$ branches.

5° On voit aisément par ce qui précède qu'il est impossible d'obtenir une sécantoïde entière ayant c branches, si c n'est pas divisible par 4, ou s'il n'est divisible par 2 en appartenant à la série 2, 6, 10...

6° Lorsque $n = 1$, la sécantoïde est une ligne droite.

SÉCANTOÏDES FRACTIONNAIRES.

Lorsque n est une fraction que nous représentons par $\frac{p}{q}$, en posant $\frac{p}{q}\,\omega' = 90$ on obtient, pour la distance ω' des branches, $\omega' = \frac{90\,q}{p}$. Si cet angle entre un nombre exact de fois dans 360° ou dans un nombre exact de fois 360°, la courbe aura un nombre fini de branches, sinon le nombre des branches infinies est infini.

VI.

Étude de la courbe $\rho = a$ coséc $(n\omega) + b$.

(Cosécantoïdes polaires du premier degré.)

On trouvera aisément le moyen de ramener l'étude des cosécantoïdes à celle des sécantoïdes.

VII.

Des spirales.

On nomme spirale *toute courbe qui fait un nombre infini de révolutions autour du pôle, en s'éloignant constamment.*

Chaque révolution constitue une *spire*.

On voit au premier abord que le nombre des équations qui représentent des spirales est infini. Nous examinerons les deux suivantes :

1° $\rho = a\omega^m$; cas où $m = 1$. *(Spirale d'Archimède.)*
2° $\rho = a\omega^m$; cas où $m = -1$. *(Spirale hyperbolique.)*

SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

L'équation de la spirale d'Archimède est $\rho = a\omega$. Lorsque ω est nul, le rayon vecteur est nul; la courbe passe donc au pôle. Lorsque ω prend toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini, ρ prend des valeurs toujours croissantes; la courbe fera donc une infinité de révolutions autour du pôle en s'en éloignant constamment.

Toute droite passant par le pôle est coupée par la courbe en segments égaux, dont la longueur est $2\pi a$.

La spirale d'Archimède est la courbe décrite par un mobile animé d'une vitesse constante sur une trajectoire rectiligne, lorsque cette trajectoire est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses points.

Application des formules générales à la spirale d'Archimède.

TANGENTE.

La formule générale

$$\text{tang}\, \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$$

devient

$$\text{tang}\ \mu = \frac{\rho}{a} = \omega$$

La tangente de l'angle ρ est donc égale au développement de l'arc ω. Or, ω prend successivement les valeurs 2π, 4π, 6π... L'angle du rayon vecteur avec la tangente à la courbe augmente donc constamment et a pour limite l'angle droit. On en déduit que la courbe coupe l'axe polaire sous un angle aigu qui tend à devenir droit.

SOUS-TANGENTE.

La formule générale

$$S_T = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$$

devient

$$S_T = a\omega^2$$

SOUS-NORMALE.

La formule générale

$$S_N = \frac{d\rho}{d\omega}$$

devient

$$S_N = a$$

La sous-normale est constante.

NORMALE.

La formule générale

$$N = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

devient

$$N = a\sqrt{\omega^2 + 1}$$

RECTIFICATION.

La formule générale

$$s = \int d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}$$

devient

$$s = a\int d\omega \sqrt{1 + \omega^2}$$

ou

$$s = a\int \frac{d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} + a\int \frac{\omega^2\, d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

Or.

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \text{log nép}\left\{\omega + \sqrt{1 + \omega^2}\right\}$$

et

$$\int \frac{\omega^2\, d\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \omega\sqrt{1 + \omega^2} - \int d\omega \sqrt{1 + \omega^2}$$

Donc

$$s = \frac{a}{2}\,\text{log nép}\left\{\omega + \sqrt{1 + \omega^2}\right\} + \frac{a\omega}{2}\sqrt{1 + \omega^2} + C$$

QUADRATURE.

La formule générale

$$q = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$$

devient, de ω', à ω''

$$q = \frac{a^2}{6}\left(\omega'^3 - \omega''^3\right)$$

Il faut observer que le rayon vecteur décrit à chaque révolution toute la surface comprise dans la dernière spire, c'est-à-dire celle des spires précédentes. Pour avoir la surface comprise dans la m^{ème} spire, il faut donc intégrer, non de zéro à $2\pi m$, mais de $2\pi(m-1)$ à $2\pi m$. On trouve ainsi

$$\frac{a^2}{6}\, 8\,\pi^3 \left(m^3 - (m-1)^3\right)$$

De même, on aurait pour la spire suivante :

$$\frac{a^2}{6}\, 8\,\pi^3 \left((m+1)^3 - m^3\right)$$

La différence de ces deux valeurs exprime la surface du $m+1^{\text{ème}}$ anneau de spire :

$$\frac{a^2}{6}\, 8\,\pi^3 \left((m+1)^3 - 2\,m^3 + (m-1)^3\right)$$

ou

$$8\,a^2\,\pi^3\,m$$

c'est-à-dire la surface d'un rectangle ayant pour base constante $8\,a^2\,\pi^3$, et pour hauteur m; ou m fois la surface du second anneau.

Cette expression ne peut servir à la mesure du premier anneau, parce que celui-ci est égal à l'anneau qui le précède et qui appartient à la courbe symétrique des ω négatifs.

Ces formules se simplifient lorsque $a = \frac{1}{2\pi}$

SPIRALE HYPERBOLIQUE.

Son équation est $\rho = \frac{a}{\omega}\cdot$

Lorsque ω est nul, le rayon vecteur est infiniment grand. Lorsque ω passe par toutes les valeurs comprises entre zéro et l'infini, ρ prend toutes les valeurs comprises entre l'infini et zéro, mais le rayon vecteur ne sera nul que lorsque ω sera infiniment grand; la courbe n'atteindra jamais le pôle tout en s'en rapprochant à chaque révolution.

Le nombre des révolutions à partir d'un point quelconque et en s'éloignant du pôle, est fini.

Le pôle est asymptote de la courbe. Une conchoïde qui aurait pour base une spirale hyperbolique aurait pour asymptote la circonférence dont le rayon serait le module de la conchoïde, et dont le centre serait au pôle.

La sous-tangente de cette courbe est constante.



NOTE SUR LES CONCHOÏDES.

On nomme *conchoïde* toute ligne engendrée par l'addition d'une quantité constante, positive ou négative, aux rayons vecteurs d'une ligne quelconque qui prend le nom de *base de la conchoïde.*

La quantité constante se nomme le *module de la conchoïde.*

L'équation d'une conchoïde est donc de la forme

$$\rho = f(\omega) + b$$

dans laquelle b est le module.

En supposant que la base de la conchoïde soit elle-même une conchoïde, on aurait :

$$\rho = f(\omega) + b + c$$

ou

$$\rho = f(\omega) + b'$$

La forme de l'équation est donc la même.

Nous savons que la sous-normale de toute courbe a pour mesure la valeur de la dérivée du rayon vecteur. Or, la dérivée de $f(\omega) + b$ est la même que celle de $f(\omega)$. Toutes les conchoïdes de même base ont donc des sous-normales égales entre elles et égales à celle de la base. On en déduit que les extrémités des sous-normales des cardioïdes et des limaçons, engendrent la circonférence qui sert de base à la courbe.

Soient plusieurs conchoïdes de même base

$$\rho = f(\omega) + b'$$
$$\rho = f(\omega) + b''$$
$$\rho = f(\omega) + b'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et supposons que l'on ait

$$b''' > b'' > b'$$

Le rayon vecteur correspondant à un angle donné prendra les valeurs croissantes ρ', ρ'', ρ'''..., et comme la sous-normale est la même, la normale tend à deve-

nir parallèle à ρ, c'est-à-dire que les tangentes tendent constamment à devenir normales au rayon vecteur, sans jamais atteindre cette limite.

On voit qu'une courbe donnée a une infinité de conchoïdes. Les deux conchoïdes obtenues par l'addition d'une même quantité b prise positivement et négativement, se nomment *conchoïdes conjuguées;* elles peuvent être exprimées par l'équation

$$\rho = f(\omega) \pm b$$

Dans certains systèmes de coordonnées, les conchoïdes conjuguées ne sont représentées que par une seule équation, et n'ont plus d'équation distincte. Ainsi, l'équation de la conchoïde à base rectiligne, nommée *conchoïde de Nicomède,* est, dans le système unipolaire :

$$\rho = a \text{ séc } \omega + b$$

$$\rho = a \text{ séc } \omega - b$$

Et si on la rapporte à des axes rectangulaires, la base $\rho = a$ séc ω étant prise pour axe des y, et l'axe des x passant par le pôle, elle devient :

$$y = \frac{a + x}{x} \sqrt{b^2 - x^2}$$

Les deux signes du radical donnent naissance aux deux courbes.

Observation. Lorsque $b < a$, cette dernière équation donne, outre les deux branches de courbe, un point isolé pour $x = -a$: ce point est le pôle de la conchoïde rapportée à des coordonnées polaires; mais

comme dans ce système, séc ω ne peut devenir < 1, le point isolé n'existe plus. On voit donc que, dans certains cas, un changement de système fait disparaître les points isolés.

Prenons maintenant la formule de quadrature

$$q = \frac{1}{2}\int \rho^2\, d\omega$$

et appliquons-la à deux conchoïdes conjuguées

$$\rho = f(\omega) + b$$
$$\rho = f(\omega) - b$$

nous aurons

$$q' = \frac{1}{2}\int f^2(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2}\int b^2\, d\omega + \int b\, f(\omega)\, d\omega$$

et

$$q'' = \frac{1}{2}\int f^2(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2}\int b^2\, d\omega - \int b\, f(\omega)\, d\omega$$

La surface comprise entre les courbes est

$$q' - q'' = 2b\int f(\omega)\, d\omega$$

expression très-simple. Soit $f(\omega) = a \cos \omega$, nous aurons :

$$\rho = a \cos \omega + b$$
$$\rho = a \cos \omega - b$$

Dans ce cas, les deux conchoïdes sont égales et se

superposent. (*V.* planche II, fig. I.) La différence des surfaces de 0 à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la différence

$$PNRA - MPBS$$

a pour valeur

$$2b\,a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\, d\omega$$

ou

$$2ba$$

c'est-à-dire deux fois le rectangle de PL par LN.

Toute ligne peut être considérée comme une conchoïde. En effet, la relation $\rho = f(\omega)$ peut être mise sous la forme $\rho = f(\omega) + b - b$, équation d'une conchoïde de base $\rho = f(\omega) + b$ et de module $-b$.

Lorsque la base est une spirale d'Archimède $\rho = a\omega$ et que le module est $2\pi a$, la conchoïde est égale à la base.

DE L'HOMOTHÉTIE.

Soit $\rho = f(\omega)$ l'équation d'un lieu. Toute courbe rapportée au même pôle et au même axe, et dont l'équation est de la forme $\rho = A\,f(\omega)$, est appelée *homothétique* de la première, quel que soit A.

Lorsque A est positif, l'homothétie est *directe;* lorsqu'il est négatif, elle est *inverse*.

Deux courbes homothétiques peuvent se réduire à la même équation par un simple changement d'unité.

Lorsqu'on a démontré qu'une courbe jouit d'une certaine propriété, celle-ci est démontrée pour toutes les homothétiques.

Les rayons vecteurs correspondant à une même valeur de ω sont entre eux dans un rapport constant.

Les cordes qui joignent les points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles et dans un rapport constant. Les tangentes correspondant à un même rayon vecteur sont parallèles.

Lorsqu'une courbe passe par le pôle, toutes ses homothétiques passent par le pôle.

Deux courbes homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles. Deux courbes situées d'une manière quelconque sont semblables lorsque l'une d'elles est égale à une des homothétiques de l'autre.

Pour que deux conchoïdes soient homothétiques, il faut que leurs bases soient homothétiques et que leurs modules soient entre eux dans le rapport d'homothétie des bases.

Lorsqu'une équation est tellement construite que le coefficient A n'affecte que la quantité ω, et qu'il ne l'affecte que d'une manière additive, l'opération revient à un simple changement angulaire dans la position de l'axe polaire; alors toutes les homothétiques de la courbe sont égales à la courbe elle-même. Ainsi, la spirale logarithmique $\rho = a^{\omega}$ a pour homothétiques $\rho = \mathrm{A}a^{\omega}$; ou si nous posons $\mathrm{A} = a^{m}$, les homothétiques seront $\rho = a^{\omega + m}$, m étant constant. Deux spirales logarithmiques ne peuvent donc être semblables que si elles sont égales.

APPLICATIONS.

1. *On demande l'équation d'une courbe telle que les extrémités de ses normales engendrent une circonférence de rayon a dont le centre soit au pôle.*

Il suffit pour cela que la sous-normale soit constante et égale à a, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d\rho}{d\omega} = a$$

ou

$$d\rho = a\, d\omega$$

On sait que lorsque deux quantités sont égales leurs fonctions primitives ne peuvent différer que par une constante. On a donc

$$\rho = a\,\omega + C$$

Cette équation représente une conchoïde dont la base est une spirale d'Archimède. Lorsque $C = o$, on a une spirale d'Archimède, et pour $a = o$, on a un cercle de rayon C, dont le centre est au pôle.

2. *On demande un moyen de tracer par un mouvement continu la conchoïde* $\rho = a \cos \omega + b$.

Le sommet d'un angle droit, dont les côtés sont assujettis à passer par les extrémités d'une ligne a, décrit un cercle de rayon $\frac{a}{2}$. On voit qu'un point situé à une distance b du sommet, sur le prolongement d'un côté, décrira la conchoïde à base circulaire.

3. *Trisection de l'angle par la conchoïde de Nicomède.*

Soit l'angle PON (planche XIII, fig. II) dont on veut avoir le tiers. Décrivons de O comme centre, et avec un rayon quelconque OP, le cercle NPM. De P comme pôle, et avec ON pour base, traçons une conchoïde $\rho = a$ séc $\omega - b$, en prenant $b =$ OP, et a égal à la distance de P à ON. Soit M l'intersection du cercle et de la conchoïde; joignons MP, et prolongeons cette ligne jusqu'à l'intersection K. A cause de la propriété de la conchoïde, on a OP $=$ KM $= b$. En joignant OM, on verra facilement que l'angle MKO est le tiers de l'angle PON, à cause des triangles isoscèles KMO, MOP.

4. L'asymptote d'une branche infinie se détermine : a) en direction, en ce qu'elle est parallèle au rayon vecteur infini; b) en position, par sa distance au rayon vecteur infini, distance qu'on obtient en faisant ω égal à l'angle qui correspond au rayon vecteur infini, dans l'expression générale de la distance d'un point de la branche au rayon vecteur infini.

On demande de déterminer l'asymptote d'une branche de la courbe $\rho = a$ tang (2ω).

On sait d'abord que l'asymptote doit faire un angle de 45° avec l'axe polaire, puisque le rayon vecteur infini est incliné à 45°.

On voit ensuite que l'expression générale de la distance d'un point de la courbe au rayon vecteur infini est

$$\rho \sin (45 - \omega)$$

ou

$$a \operatorname{tang} (2\omega) \sin (45 - \omega)$$

ou

$$a\,\frac{\sin(2\omega)\,(\sin 45\,.\cos\omega - \sin\omega\,.\cos 45)}{\cos(2\omega)}$$

c'est-à-dire

$$a\sin(2\omega)\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\cos\omega - \sin\omega}{\cos^2\omega - \sin^2\omega}$$

ou

$$a\,\frac{\sin(2\omega)\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\cos\omega + \sin\omega}$$

et en posant $\omega = 45^\circ$,

$$\frac{a}{2}$$

L'asymptote est donc à une distance $\frac{a}{2}$ du rayon vecteur infini.

5. *On demande de déterminer l'asymptote de la spirale hyperbolique.*

L'asymptote est parallèle à l'axe polaire. La distance d'un point quelconque de la branche, à l'axe, est $\rho \sin\omega$, ou

$$a\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

pour $\omega = o$, on a $\frac{\sin\omega}{\omega} = 1$; la distance de l'asymptote à l'axe est donc a.

6. *On demande la rectification de la courbe* $\rho = a\cos\omega$.

La formule de rectification devient :

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega}$$

ou

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2}$$

c'est-à-dire

$$s = a\omega$$

En intégrant de zéro à $\frac{\pi}{2}$ on aura la demi-courbe

$$\frac{a\pi}{2}$$

et pour la courbe entière

$$a\pi$$

valeur que nous savons être exacte, puisque la courbe est un cercle de diamètre a.

7. *On demande la rectification de l'épicycloïde équilatère* $\rho = a \cos \omega + a$.

La formule devient

$$s = \int d\omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + 2\, a^2 \cos \omega + a^2 + a^2 \sin^2 \omega}$$

ou

$$s = \int a\, d\omega \sqrt{2\,(1 + \cos \omega)}$$

ou

$$s = a \int d\omega \sqrt{2 \, . \, 2 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

ou

$$s = 2\,a \int \cos \frac{\omega}{2}\, d\omega$$

ou

$$s = 4\,a \sin \frac{\omega}{2}$$

En intégrant de zéro à π, on obtient

$$s = 4\,a$$

et pour la courbe entière

$$s = 8\,a$$

8. *On demande la quadrature de la courbe*

$$\rho = a \cos \omega + b$$

La formule générale devient

$$q = \frac{1}{2} \int \left(a^2 \cos^2 \omega\, d\omega + b^2\, d\omega + 2\,ab \cos \omega\, d\omega \right)$$

Or,

$$\int \cos^2 \omega\, d\omega = \int \frac{1 + \cos 2\omega}{2}\, d\omega = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\omega$$

Il faut intégrer de zéro à π pour la cardioïde et pour l'épicycloïde équilatère. Pour le limaçon de Pascal, il faut intégrer de zéro à k, la quantité k étant la première valeur de ω qui annule le rayon vecteur. Or, on a, pour $\omega = k$,

$$\rho = o$$

et

$$\cos \omega = -\frac{b}{a}$$

et

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

et encore

$$\sin 2\omega = 2 \sin \omega \cos \omega = - \frac{2b}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2}$$

On aura par conséquent

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2k}{2} - \frac{a^2}{4} \frac{2b}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} + 2\,ab \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} + b^2 k \right)$$

ou

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + 2b^2}{2} k + \frac{3}{2} b \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

En doublant cette valeur, on obtiendrait la surface entière.

La surface comprise dans la branche intérieure PAB est de même

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + 2b^2}{2} (\pi - k) - \frac{3}{2} b \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

valeur qu'il faut doubler pour obtenir la surface complète.

La valeur de k s'obtient graphiquement comme suit : élevons du pôle une perpendiculaire à l'axe polaire (planche III, fig. I), et prenons-la égale à a. Décrivons la circonférence de diamètre PM, et prenons $\mathrm{MN} = b$; l'angle NPB sera la valeur de ω, qui annule le rayon vecteur.

9. *On demande la quadrature de l'épicycloïde équilatère* $\rho = a \cos \omega + a$.

En faisant dans la formule obtenue ci-dessus $a = b$ et $k = \pi$, on obtient :

$$q = \frac{3}{2} \pi a^2$$

c'est-à-dire les $\frac{3}{2}$ du cercle de rayon MP qui est égal au cercle décrit par le centre de la circonférence mobile (planche II, fig. II), ou les $\frac{2}{3}$ du cercle de rayon ON, ou six fois la surface du cercle générateur.

10. *On demande la quadrature de la spirale hyperbolique.*

La formule générale de quadrature pour les courbes de la forme $\rho = a\omega^m$ est

$$q = \frac{a^2}{2} \int \omega^{2m} d\omega$$

ou

$$q = \frac{a^2}{2} \frac{\omega^{2m+1}}{2m+1}$$

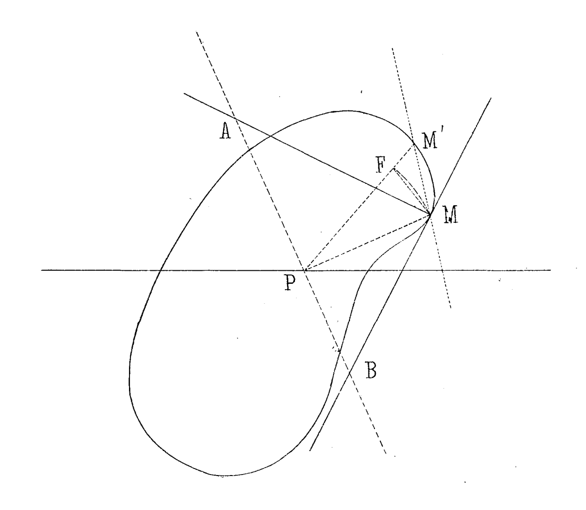
en faisant $m = -1$, on a, de ω' à ω''

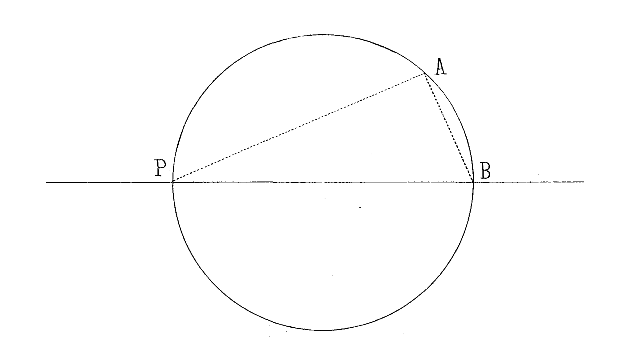
$$q = \frac{a^2}{2\omega''} - \frac{a^2}{2\omega'}$$

FIN.

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, place Puy-Paulin, 1.

1re Planche.



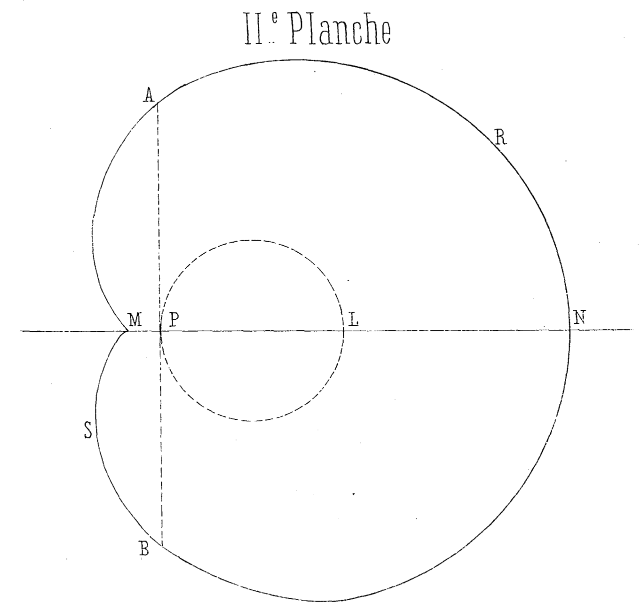


Circonférence.

$\rho = a.\cos.\omega$

Cosinusoïde polaire à une branche.

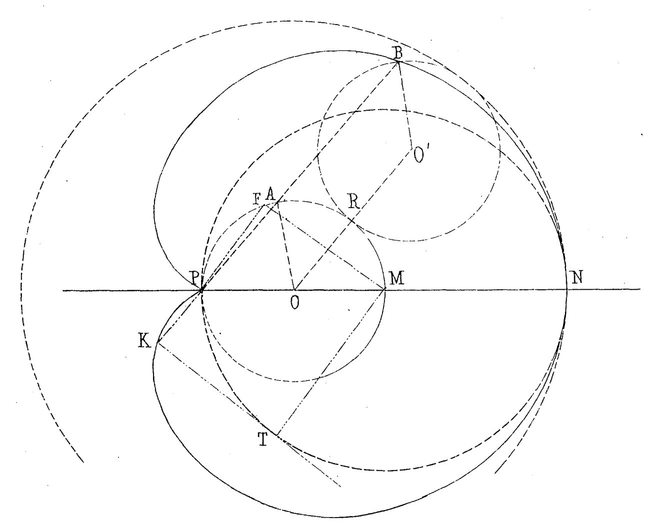
II.e Planche



$\rho = a.\cos.\omega \pm b$; $b > a$.

Cosinusoïde polaire à une branche

(Conchoïdes à base circulaire)

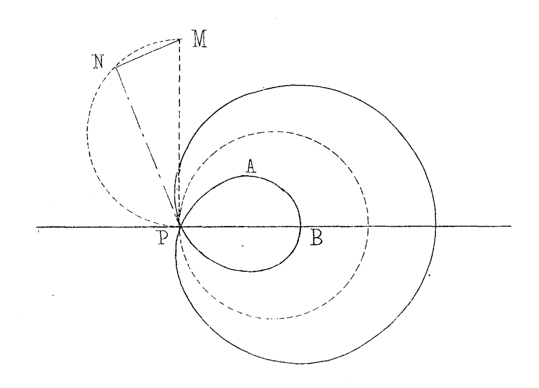


Epicycloïde

$\rho = a.\cos.\omega \pm b$; $a = b$

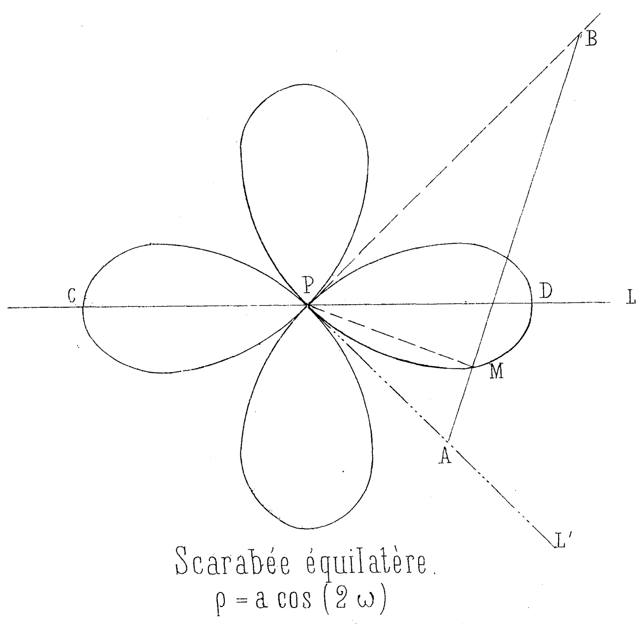
Cosinusoïde polaire à une branche

111.e Planche.



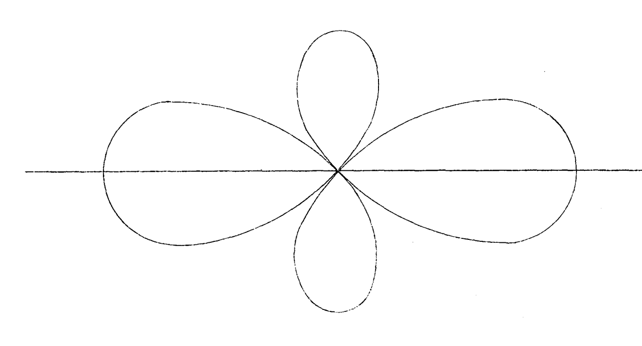
Limaçon de Pascal
$\rho = a \cos \omega \pm b \,;\, b < a$

Cosinusoïde polaire à une branche
(Conchoïde à base circulaire)



Scarabée équilatère.
$\rho = a \cos (2\omega)$
Cosinusoïde polaire à 4 branches.

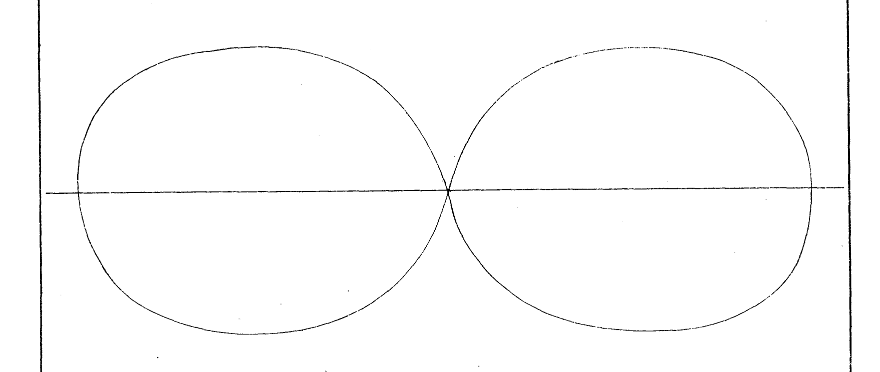
IVe Planche.



$\rho = a.\cos(2\omega) + b$; $b < a$

Cosinusoïde polaire à 4 branches.

(Conchoïdes à base cosinusoïde)

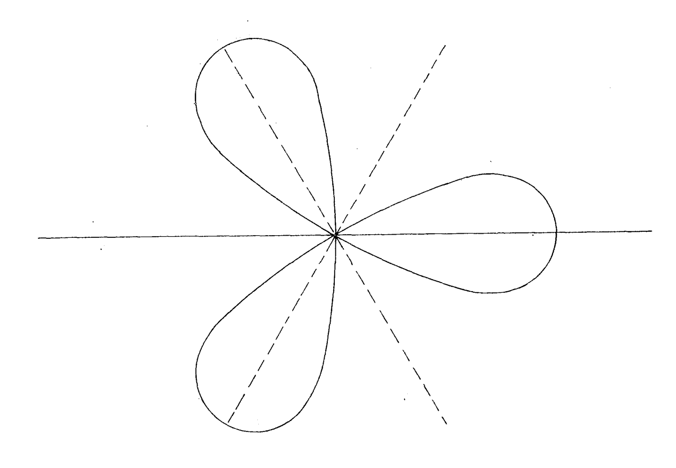


$\rho = a.\cos(2\omega) + b$; $b = a$.

Cosinusoïde polaire à 4 branches

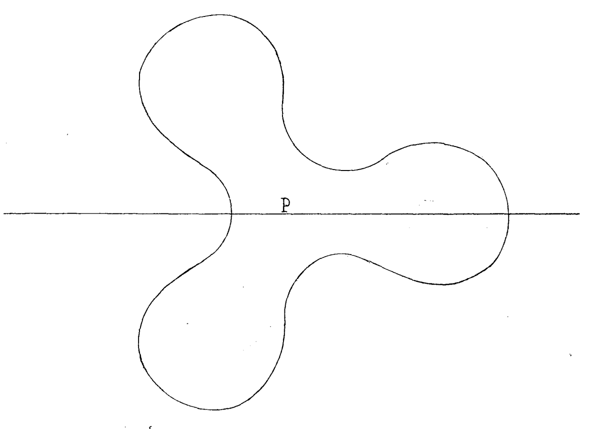
Deux branches se réduisent à un point (le pôle).

Vᵉ Planche.



$\rho = a . \cos (3\omega)$

Cosinusoïde polaire à 3 branches

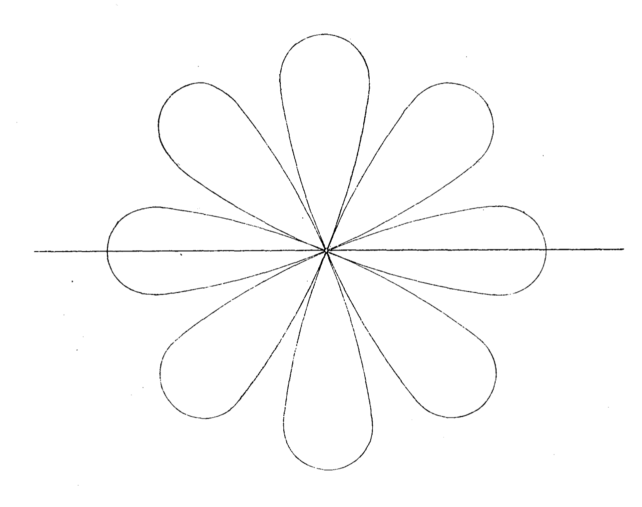


Conchoïde à base cosinusoïde

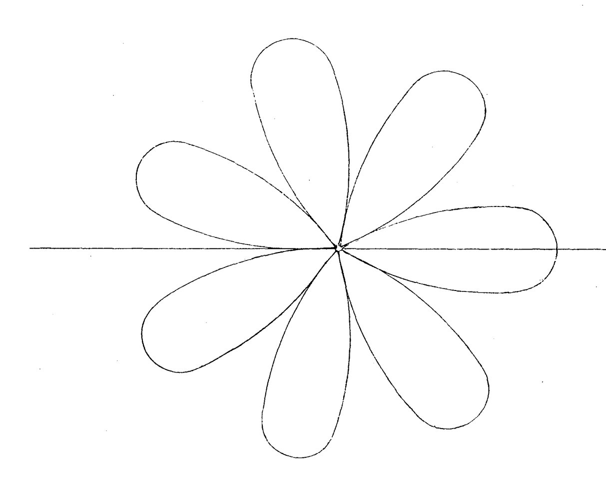
$\rho = a \cos (3\omega) + b \; ; \; b > a$

(Cosinusoïde polaire à 3 branches)

VI.e Planche.

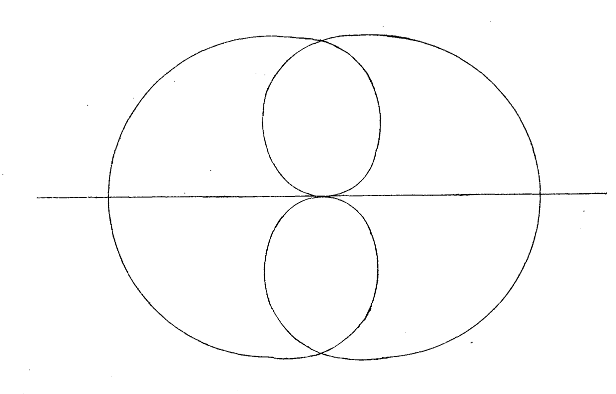


$\rho = a . \cos (4 \omega)$
Cosinusoïde polaire á 8 branches



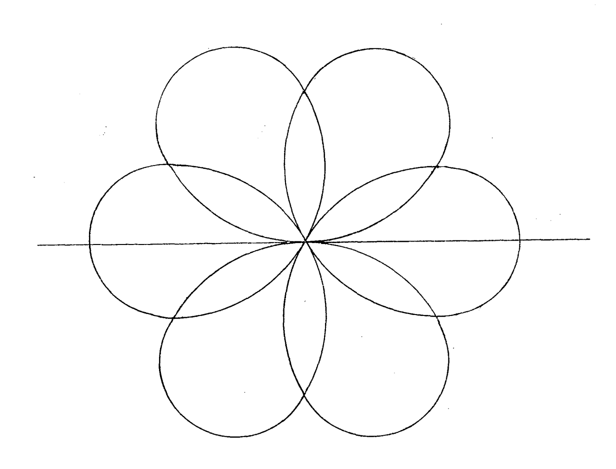
$\rho = a . \cos . (7 \omega)$
Cosinusoïde polaire á 7 branches.

VII.e Planche.



$\rho = a \cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)$

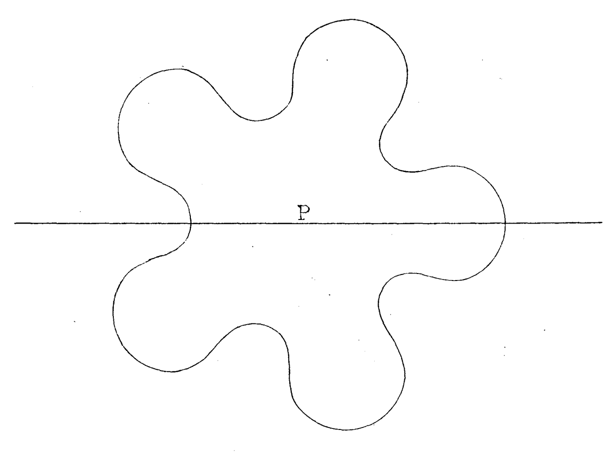
Cosinusoïde polaire fractionnaire.



$\rho = a. \cos\left(\frac{3}{2}\omega\right)$

Cosinusoïde polaire fractionnaire.

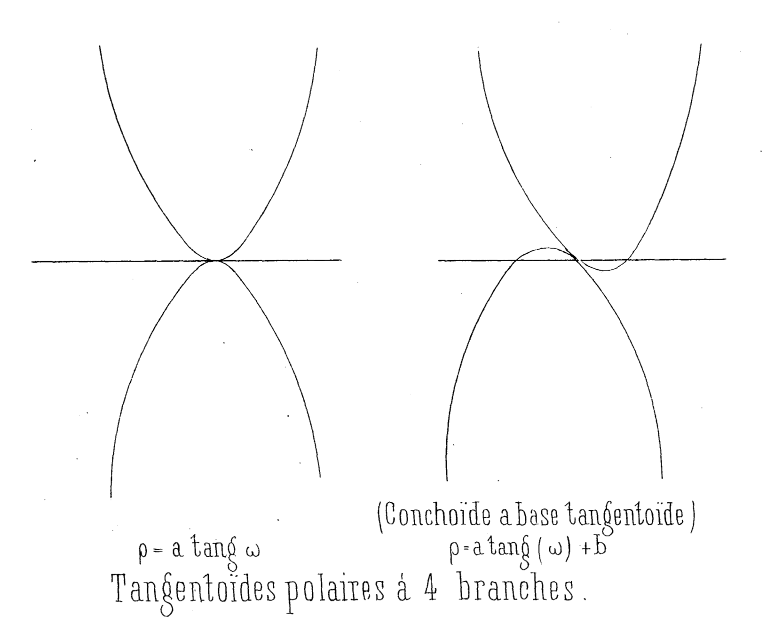
VIII.e Planche



(Conchoïde a base cosinusoïde)

$\rho = a.\cos(5\omega) + b \,;\; b > a$

Cosinusoïde polaire à 5 branches.

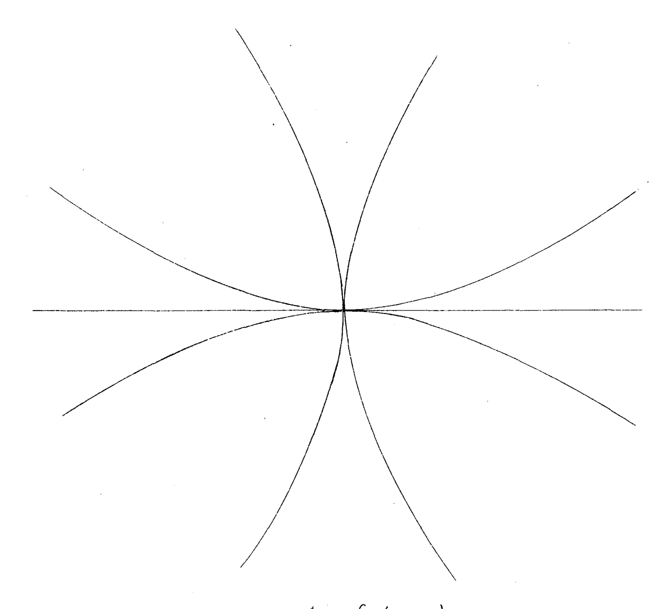


(Conchoïde a base tangentoïde)

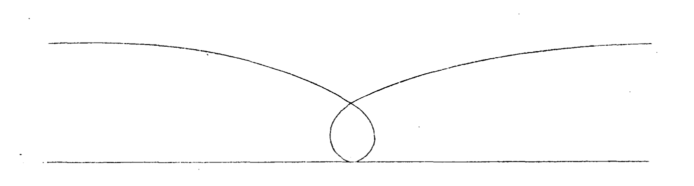
$\rho = a \operatorname{tang} \omega$ $\qquad$ $\rho = a \operatorname{tang}(\omega) + b$

Tangentoïdes polaires à 4 branches.

IX.e Planche.

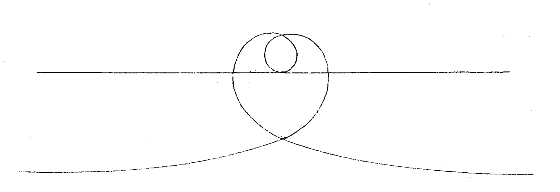


$\rho = a.\tang (2\omega)$
Tangentoïde polaire à 8 branches



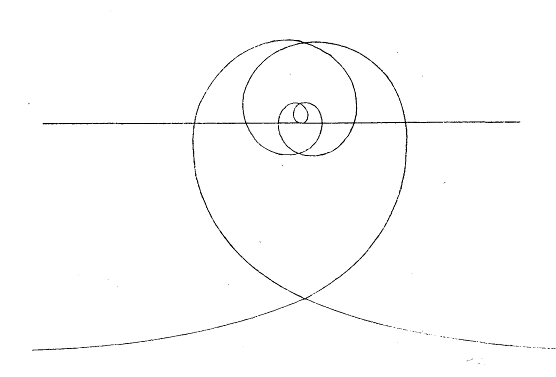
$\rho = a.\tang (\frac{1}{2}\omega)$
Tangentoïde polaire fractionnaire.

Xe Planche.



$\rho = a.\tan g\left(\frac{1}{4}\omega\right)$

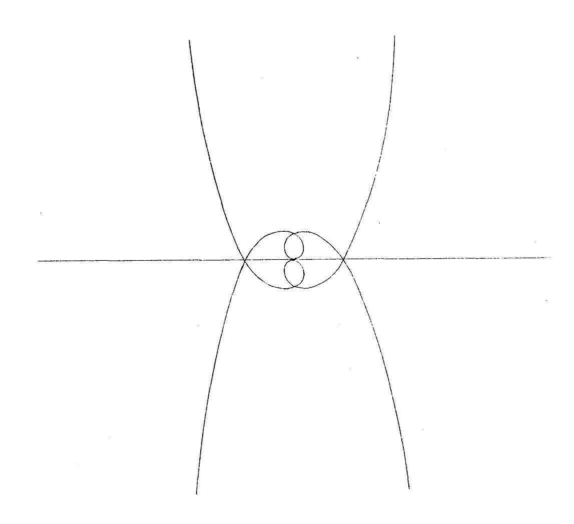
Tangentoïde polaire fractionnaire.



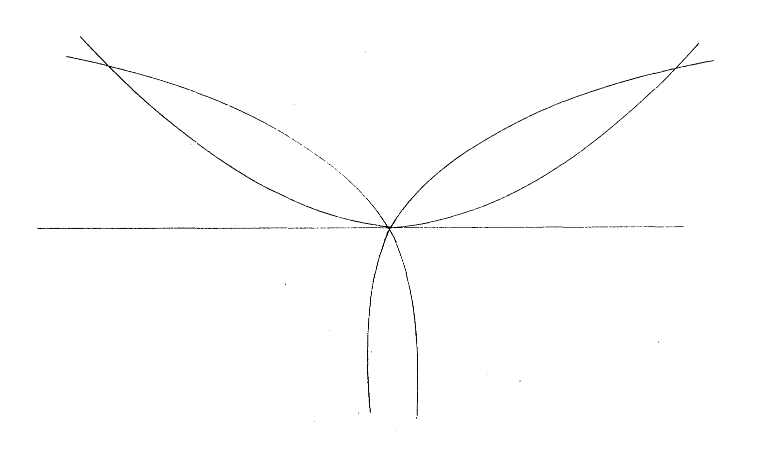
$\rho = a.\tan g\left(\frac{1}{8}\omega\right)$

Tangentoïde polaire fractionnaire.

XI.e Planche.



$\rho = a.\tang\left(\frac{1}{3}\omega\right)$
Tangentoïde polaire fractionnaire



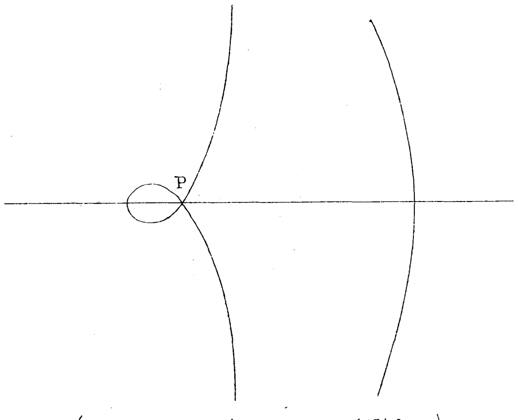
$\rho = a.\tang\left(\frac{3}{2}\omega\right)$
Tangentoïde polaire fractionnaire

XIIe Planche.

Ligne droite.

$\rho = a.\ \sec\omega$

Sécantoïde polaire à 2 branches.

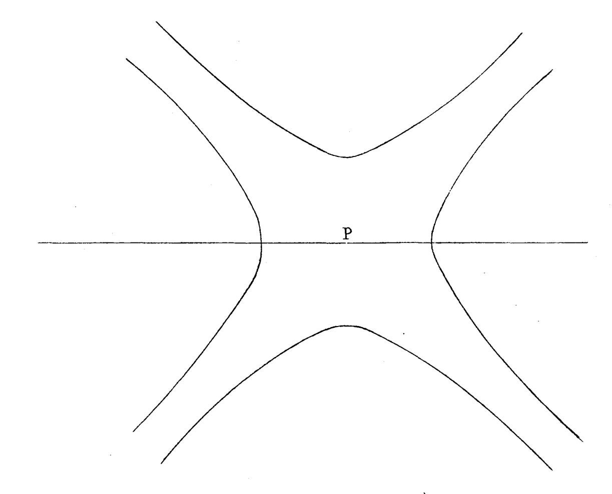


(Conchoïde à base rectiligne)

$\rho = a.\sec(\omega) \pm b\ ;\ b > a$

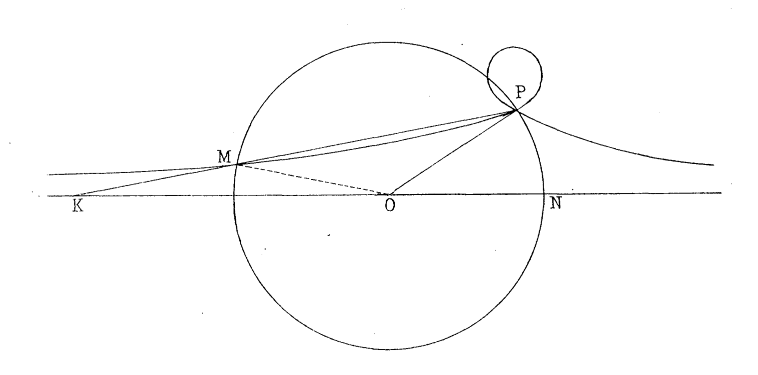
Sécantoïde polaire

XIIIe Planche.



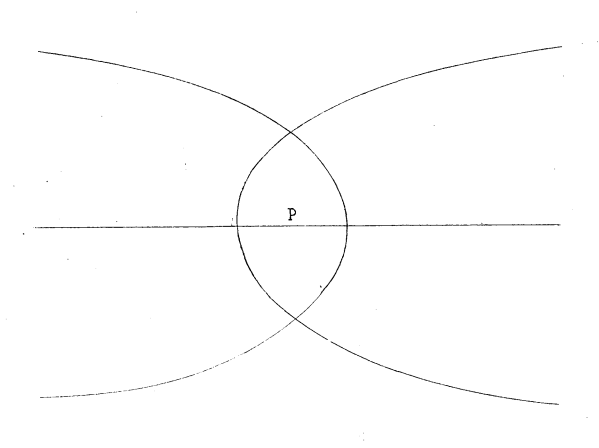
$\rho = a . \sec (2 \omega)$

Secantoïde polaire à 8 branches



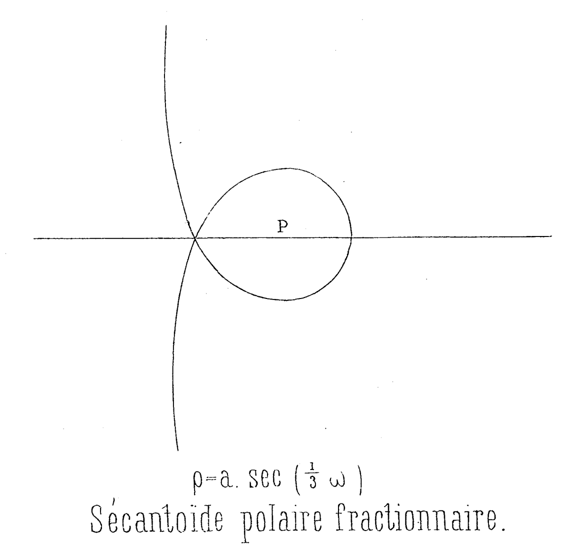
Trisection de l'angle.

XIV.ᵉ Planche.



$\rho = a . \sec \left(\frac{1}{2}\omega\right)$

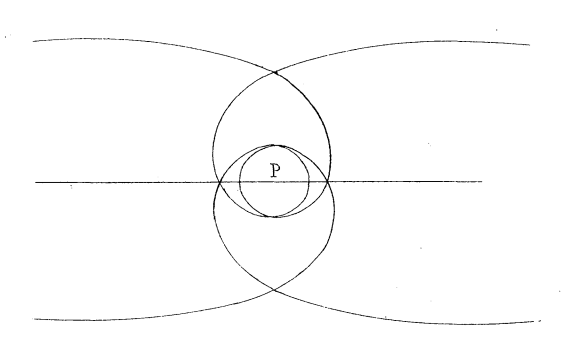
Sécantoïde polaire fractionnaire.



$\rho = a . \sec \left(\frac{1}{3}\omega\right)$

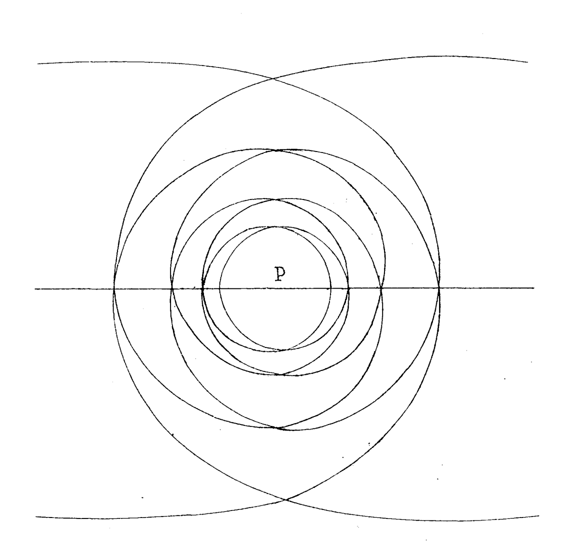
Sécantoïde polaire fractionnaire.

XVe Planche.



$\rho = a \sec\left(\frac{1}{4}\omega\right)$

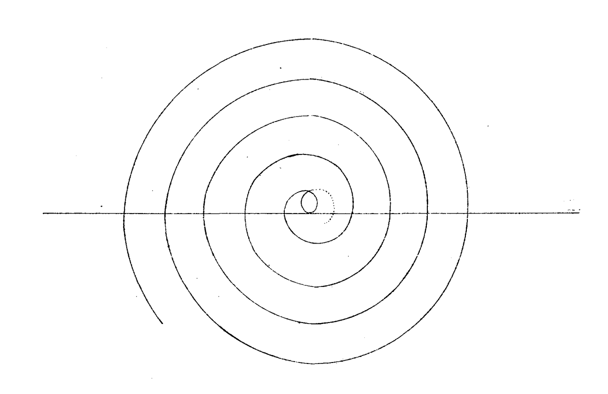
Sécantoïde polaire fractionnaire



$\rho = a. \sec\left(\frac{1}{8}\omega\right)$

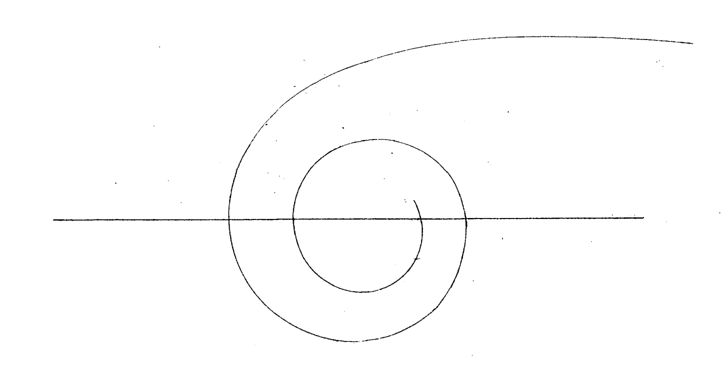
Sécantoïde polaire fractionnaire.

XVIe. Planche.



$\rho = a.\omega$

Spirale d'Archimède.



$\rho = \frac{a}{\omega}$

Spirale hyperbolique.